Tema 1: NÚMEROS NATURALES. SISTEMAS DE NUMERACIÓN.

1.- INTRODUCCIÓN

El concepto número surge por como todo en las matemáticas, por la necesidad práctica, del ser humano de contar. Se remonta a épocas tan tempranas como el nacimiento del fuego hace 400.000 años.

La construcción formal de número natural se hizo a partir de dos vertientes: la conjuntista, que resultó un fracaso por las contradicciones lógicas y la axiomática, impulsada por Giuseppe Peano, que se acabó imponiendo.

En este primer tema desarrollaremos la idea de número natural y las bases de numeración desde un punto de vista más formal y abstracto, siguiendo el esquema anterior. Se necesitan conceptos elementales sobre relaciones binarias y divisibilida (TII-T4)

2.- DEFINICIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES. PROPIEDADES.

El conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$ puede:

a) Construirse como clases de equivalencia obtenidas por la relación de coordinabilidad entre conjuntos

b) Definirse mediante los axioma de Peano (1889)

La vía que elegimos en este tema para introducir, y posteriormente estudiar las propiedades de los números naturales, es la segunda, mediante los axiomas de Peano, pues antes de comenzar veamos brevemente, como se construirán a partir de la relación de coordinabilidad.

2.1.- Relación de coordinabilidad.

Se dice que dos conjuntos A y B son coordinables, y se escribe $A \sim B$, si hay tantos elementos en uno como en otro. De la definición se obtienen las siguientes propiedades.

1. Todo conjunto es coordinable consigo mismo (Prop. reflexiva)
2. Si $A \sim B$ entonces $B \sim A$ (Prop. Simétrica)
3. Si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$ (Prop ~~simétrica~~ transitiva).

④ Dos ordenaciones diferentes de un mismo conjunto finito son coordinables entre sí.

Para poder comparar entre sí los conjuntos finitos, conviene elegir un conjunto $\mathbb{N}$ fijo como tipo de comparación entre todos ellos. Este conjunto está formado por abstractos, llamados números naturales, cada uno de los cuales recibe un nombre y se representa por un símbolo.

Así pues, a las colecciones de conjuntos coordinables entre sí, que obtenemos después de la clasificación, las llamaremos <u>clases de equivalencia de conjuntos coordinables</u>, donde cada colección es una clase (de equivalencia).

En cada clase (bolsa) hay una colección "infinita" de conjuntos finitos coordinables entre sí:

Entonces, al <u>conjunto de número naturales</u> podemos definirlo de dos formas:

Ⓐ Un número $\mathbb{N}$ es una colección infinita de conjuntos finitos, coordinables entre sí.

Ⓑ Un número $\mathbb{N}$ es una clase de equivalencia de conjuntos finitos coordinables entre sí.

2.2.- Axiomas de Peano

Los números naturales se definen como un conjunto de entes que satisfacen 5 axiomas, denominados axiomas de Peano. (La notación utilizada es: "es el siguiente de a" = s(a)).

Ax.1: $0 \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N} \neq \emptyset$

Ax.2: $\forall a \in \mathbb{N}\ \exists\ s(a)$ y $s(a) \in \mathbb{N}$

Ax.3: $\forall a \in \mathbb{N}\ \ s(a) \neq 0$ (≡ el 0 no es el siguiente de ningún número).

Ax.4: $\forall a, b \in \mathbb{N}\ /\ s(a) = s(b) \Rightarrow a = b$

Ax.5: "Axioma de Inducción matemática"

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } K \in \mathbb{N} \\ 0 \in K \\ \forall a \in K,\ s(a) \in K \end{array}\right\} k = \mathbb{N}$$

De los Axiomas de Peano se deducen las siguientes propiedades:

① $\forall a,b \in \mathbb{N} \ / \ a \neq b \Rightarrow s(a) \neq s(b)$

Dem:

Si $s(a)=s(b) \xRightarrow{Ax.4} a=b \ \# \Rightarrow s(a) \neq s(b)$

② $\forall a \in \mathbb{N}, \ s(a) \neq a$

Dem:

Sea $K=\{a \in \mathbb{N} \ / \ s(a) \neq a\}$. Veamos que $K=\mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} K \subseteq \mathbb{N} \text{ (por def. de } K) \\ 0 \in K \text{ (por Ax.3)} \\ \text{Sea } a \in K \longrightarrow s(a) \neq a \xRightarrow{Prop\ 1} s(s(a)) \neq s(a) \Rightarrow s(a) \in K \end{array}\right\} \underset{Ax\,5.}{\Rightarrow} K=\mathbb{N}$$

③ $\forall a \in \mathbb{N}-\{0\} \ \exists b \in \mathbb{N} \ / \ s(b)=a$

Dem:

Sean $K=\{0\} \cup \{a \in \mathbb{N}-\{0\} \ / \ \exists b \in \mathbb{N} : a=s(b)\}$ ¿ $K=\mathbb{N}$?

$$\left.\begin{array}{l} K \subseteq \mathbb{N} \text{ (por def. de } K) \\ 0 \in K \text{ (por def. de } K) \\ \text{Sea } a \in K,\ a \neq 0 \Rightarrow \exists b \in \mathbb{N} \ / \ a=s(b) \Rightarrow s(a)=s(s(b)) \Rightarrow s(a) \in K \end{array}\right\} \xRightarrow{Ax5} K=\mathbb{N}$$

3.- Operaciones Aritméticas. Propiedades.

Las dos operaciones aritméticas fundamentales, la adición de números y la multiplicación, se definen en los números naturales. A continuación, veremos como para finalmente demostrar la estructura algebraica que $\mathbb{N}$ tiene con cada una de ellas y con ambas a la vez.

3.1.- Adición de números naturales. Propiedades.

Se define la adición de números naturales como la aplicación:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$(x,y) \longmapsto +(x,y) = x+y \text{ (suma de } x \text{ con } y)$$

cumpliendo:
1. $x+0=x \quad \forall x \in \mathbb{N}$
2. $x+s(y)=s(x+y) \quad \forall x,y \in \mathbb{N}$

Con esta definición se verifica:

a) $\forall x \in \mathbb{N} \mid x+1 = s(x)$

Dem: $x+1 = x + s(0) = s(x+0) = s(x)$

b) $x+y=0 \iff x=0 \wedge y=0$

Dem:

($\Rightarrow$) R.A. Supongamos $y \neq 0$, $x=0 \Rightarrow \exists b \in \mathbb{N} \,/\, y = s(b)$

Entonces: $x+y = x+s(b) = s(x+b) = s(0+b) = s(b) = y \neq 0$

Entonces: $x+y \neq 0$ ↯ luego si $x+y=0 \Rightarrow x=0 \wedge y=0$

($\Leftarrow$) $x+y = 0+y = y = 0$

La aplicación + así definida es una ley de composición interna y verifica las siguientes propiedades:

① CONMUTATIVA: $a+b = b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{N}$

② ASOCIATIVA: $(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{N}$

③ $\exists$ ELEMENTO NEUTRO: $\forall a \in \mathbb{N} \quad a+0 = 0+a = a$

Por lo que $(\mathbb{N},+)$ tiene estructura de semigrupo abeliano con elemento neutro

3.2.- Multiplicación de números Naturales. Propiedades.

Se define el producto de los números naturales como la aplicación:

$$(\cdot)\ f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(x,y) \rightsquigarrow f(x,y) = x\cdot y \text{ (producto de x por y)}$$

tal que:

① $f(x,0) = x\cdot 0 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{N}$

② $f(x,s(y)) = x\cdot s(y) = x\cdot y + x \quad \forall x,y \in \mathbb{N}$

Con esta definición se verifica que:

$x\cdot y = 0 \iff x=0 \vee y=0$ ($\equiv$ No existen divisores de cero)

Dem:

$(\Rightarrow)$ R.A. Supongamos $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow$ Como $y \neq 0$ $\exists b \in \mathbb{N} / y = s(b)$

$\Rightarrow x \cdot y = x \cdot s(b) = x \cdot b + x \neq 0$ ya que $x \neq 0$ #

$(\Leftarrow)$ Si $x = 0 \Rightarrow 0 \cdot y = 0$

Si $y = 0 \Rightarrow x \cdot 0 = 0$

La aplicación $\cdot$ así definida es una ley de composición interna y verifica las siguientes propiedades:

1. CONMUTATIVA: $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$
2. ASOCIATIVA: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}$
3. $\exists$ elemento neutro: $\exists 1 \in \mathbb{N} / a \cdot 1 = 1 \cdot a, \ \forall a \in \mathbb{N}$
4. $\exists$ elemento absorvente: $\exists 0 \in \mathbb{N} / a \cdot 0 = 0 \cdot a, \ \forall a \in \mathbb{N}$
5. DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTO RESPECTO DE LA SUMA:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}$

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}$

Por tanto,

$(\mathbb{N}, \cdot)$ es un semigrupo abeliano con elemento neutro.

Así: $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ es un semianillo abeliano con elemento neutro.

3.3.- Sustracción de números naturales.

Una vez definida la adición en el conjunto de los números naturales, tenemos la posibilidad de plantear estas ecuaciones

$3 + x = 8$ ecuación que tiene solución

$6 + x = 2$ ecuación que no tiene solución

Si la ecuación $a + x = b$ con $a, b \in \mathbb{N}$ tiene solución, dicha solución la escribiremos $b - a$ y la leeremos "b" menos "a" o sustración de b y a.

Para hacer posible la sustración para cualquier a y b se ampliará el concepte de número y se introducen los números enteros.

3.4.- División exacta.

Una vez definido el producto en $\mathbb{N}$ tenemos la posibilidad de plantear estas ecuaciones: $2x=8$ ecuación que tiene solución

$8x=2$ ecuación que no tiene solución

Si la ecuación $a\cdot x=b$ con $a,b \in \mathbb{N}$ tiene solución, dicha solución la escribimos b/a y la leeremos <u>"b" dividido entre "a"</u>

Para hacer posible la división para cualquier a y $b \in \mathbb{N}$ se ampliará el concepto de número y se introducen los números racionales.

3.5.- Potencias.

La idea de exponente es una notación convencional que adoptamos para facilitar los cálculos. Si el número natural n se multiplica por sí mismo k veces, el producto obtenido se representa por n^k, leyéndose base n y exponente k.

3.6.- Consecuencias

Ley de Simplificación:

a) Para la suma: $a+c=a+b \Rightarrow c=b \quad \forall a,b,c \in \mathbb{N}$

b) Para el producto: $a\cdot c=a\cdot b \Rightarrow c=b \quad \forall a,b,c \in \mathbb{N}$

Ley de Monotonía:

a) Para la suma: Si $a=b \Rightarrow a+c=b+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{N}$

b) Para el producto: Si $a=b \Rightarrow a\cdot c=b\cdot c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{N}$

4.- Relación de orden de los números naturales.

Sean $a,b \in \mathbb{N}$. Se dice que "a es menor que b", y lo denotaremos $a<b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}^*$ tal que $a+c=b$. La relación "<" es de orden estricto en $\mathbb{N}$ ya que verifica:

① Propiedad Antireflexiva: $\forall a \in \mathbb{N}$, $a \not< a$

② Propiedad Antisimétrica: $\forall a,b \in \mathbb{N}$ si $a<b \Rightarrow b \not< a$

③ Propiedad Transitiva: $\forall a,b,c \in \mathbb{N}$ si $\left.\begin{array}{l} a<b \\ b<c \end{array}\right\} \Rightarrow a<c$

Sean $a,b \in \mathbb{N}$ se dice que "<u>a es menor o igual que b</u>", denotado

$a \leq b \Longleftrightarrow a < b \wedge a = b$

La relación "$\leq$" es de orden total en $\mathbb{N}$ ya que verifica:

① Propiedad Reflexiva: $\forall a \in \mathbb{N}$, $a \leq a$

② Propiedad Antisimétrica: $\forall a,b \in \mathbb{N}$ si $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ b \leq a \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$

③ Propiedad Transitiva: $\forall a,b,c \in \mathbb{N}$ si $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ b \leq c \end{array}\right\} \Rightarrow a \leq c$

Además cumple:

4- Propiedad Conexa: $\forall a,b \in \mathbb{N}$, $a \leq b \vee b \leq a$

Por lo que todos los números de $\mathbb{N}$ son comparables.

<u>~~PROPOSICIÓN~~ PROPIEDADES</u>

1- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $0 < n$

2- LEY DE TRICOTONÍA: $\forall m,n \in \mathbb{N}$, $m < n \veebar m > n \veebar m = n$

3- Si $a < b \Rightarrow \begin{array}{l} a+c < b+c \\ a \cdot c < b \cdot c \end{array}$ $\quad \forall c \in \mathbb{N} \quad$ · Si $a \leq b \Rightarrow \begin{array}{l} a+c \leq b+c \\ a \cdot c \leq b \cdot c \end{array}$

4- Si $\left.\begin{array}{l} a < b \\ c < d \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a+c < b+d \\ a \cdot c < b \cdot d \end{array}$ $\quad$ · Si $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a+c \leq b+d \\ a \cdot c \leq b \cdot d \end{array}$

Así: $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$ Se llama semianillo ordenado de los números naturales.

- <u>PROPOSICIÓN</u> -

El conjunto $\mathbb{N}$ con la relación $\leq$ está bien ordenado. Es decir, todo subconjunto G de $\mathbb{N}$ tiene elemento mínimo.

<u>Dem:</u>

Recordemos que se entiende por elemento ~~neutro~~ mínimo.

$m \in G \,/\, m \leq c \quad \forall c \in G$

Sea $G \subset \mathbb{N}$ con $G \neq \emptyset$.

Podemos encontrar dos situaciones:

1) $0 \in \mathcal{C} \Rightarrow 0 = \min \mathcal{C}$

2) $0 \notin \mathcal{C}$

Sea $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x < c \quad \forall c \in \mathcal{C}\}$

Veamos $A \cap \mathcal{C} = \emptyset$

$\forall x \in A$ y $c \in \mathcal{C}$ $\exists d > 0 \,/\, x + d = c \Rightarrow x \neq c \quad \forall c \in \mathcal{C} \Rightarrow x \notin \mathcal{C} \Rightarrow A \cap C = \emptyset$

Luego $A \neq \mathbb{N}$

$0 \in A \Rightarrow A$ es no recurrente.

Debe existir $a_0 \in A \,/\, a_0^* \notin A$.

Como $a_0 < c \quad \forall c \in \mathcal{C}$ (por def. de A) sería $a_0^* \leq c \quad \forall c \in \mathcal{C}$. Y como no puede suceder que $a_0^* < c \quad \forall c \in \mathcal{C}$ (si sucede tendríamos que $a_0^* \in A$).

$$\exists c_0 \in \mathcal{C} \,/\, c_0 = a_0^* = \min \mathcal{C}$$

TEOREMA DEL EXTREMO

Toda parte B de $\mathbb{N}$ no vacía y acotada superiormente tiene elemento máximo.

Dem:

Llamamos $\mathcal{C}$ al conjunto de cotas superiores de B (no vacío)

$\Rightarrow \exists x_0 := \min \mathcal{C}$

- Si $x_0 = 0 \Rightarrow B = \{0\}$ y $0 = \max B$
- Si $x_0 \neq 0$, veamos que $x_0 = \max B$.

Desde luego x_0 es cota superior, pero el anterior $\overline{x_0}$ $(S(\overline{x_0}) = x_0)$ no es cota superior.

Lo que significa que $\exists b_0 \in B \,/\, \overline{x_0} < b_0$

$\Rightarrow S(\overline{x_0}) = x_0 \leq b_0 \Rightarrow x_0 \in B \wedge x_0 = \text{cot. sup}$

$x_0 = \min \mathcal{C} \Rightarrow x_0 = \max B$

Es decir:

x_0 es la máxima cota superior.

Además, $\exists b_0 \in B$ con $b_0 > \overline{x_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow b_0 \geq S(\overline{x_0}) = x_0 \Rightarrow x_0 \in B \Rightarrow x_0$ es el max B.

5.- $\mathbb{N}$ es no finito.

Demostremos que el conjunto $\mathbb{N}$ es no finito. Para ello, veamos antes una definición que necesitaremos para su demostración.

- CONJUNTOS FINITOS -

Dado $n \in \mathbb{N}$ se llama sección, denotado $S(n) = \{x \in \mathbb{N} / x < n\}$

Así, pues, un conjunto C decimos que es <u>finito</u> si puede ponerse en correspondencia biyectiva con alguna sección $S(n)$. En este caso, n es el número de elementos de C. Y lo denotaremos por: $n = \text{card}(C)$

- <u>Teorema</u> -

$\mathbb{N}$ es no finito.

<u>Dem</u>:

$\boxed{RA}$ Supondremos que $\mathbb{N}$ es finito.

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid S(n)$ y $\mathbb{N}$ pueden ponerse en correspondencia biyectiva.

Sea φ dicha aplicación biyectiva:

$$\varphi : S(n) \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$m \rightsquigarrow \varphi(m) = a$$

Con $S(m) = n$

Como $\varphi(m) = a$ con $s(m) = n$, obtenemos una biyección:

$$\theta : S(m) \longrightarrow \mathbb{N} - \{a\}$$

Pero también podríamos poner $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N} - \{a\}$ en correspondencia biyectiva, por ejemplo:

$$\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} - \{a\}$$

$$\text{donde: } \psi(j) = \begin{cases} j & j < a \\ j+1 & a \leq j \end{cases}$$

Componiendo θ y ψ obtenemos una biyección entre $S(m)$ y $S(n)$ # porque $m \neq n$.

$\Rightarrow \mathbb{N}$ es no finito cqd

6. Sistema de numeración

A lo largo de este tema hemos definido los números naturales, pero estos son entes abstractos, por lo tanto, para representarlos necesitamos buscar palabras, símbolos y reglas: necesitamos sistemas de numeración.

Llamamos sistema de numeración al conjunto de reglas y convenios que utilizamos para nombrar y escribir los números, empleando la menor cantidad posible de palabras y símbolos. Los símbolos se llaman cifras o dígitos del sistema, y el cardinal del conjunto de símbolos utilizados recibe el nombre de BASE del sistema.

El sistema de numeración más utilizado es el sistema de numeración decimal y los signos de este sistema son los signos del 0 al 9. Sin embargo, también se utilizan cotidianamente otros sistemas de numeración, sin apenas prestarle atención. Por ejemplo, cuando se consulta la hora se está usando el sistema sexagesimal.

Existen sistemas de numeración posicionales, aditivos o no. Por ejemplo en la época inicial de la civilización romana, el sistema era acumulativo, es decir, no posicional: cada dígito tenía valor independiente del lugar que ocupa. Los dígitos son: I / V / X / L / C / D / M

Este sistema fue el empleado en Europa hasta alrededor del siglo XVI

6.1.- Sistemas posicionales

Es aquel en el que una cantidad (número) viene definida por una cadena de dígitos, donde dependiendo de la posición que ocupan dichos dígitos en esta cadena, adquieren un valor u otro. Este factor de escala es siempre la base (número de dígitos que se emplea) del sistema de numeración elevada a un valor diferente para cada posible posición del dígito de la cadena.

El sistema de numeración posicional clásico es el ~~decimal~~ decimal, en la que la posición del dígito indica la potencia de 10 que le afecta.

Por ejemplo: $73 = 70+3 = 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

En general, en un sistema posicional de base b, un número N se puede escribir como una secuencia de dígitos.

$$a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_{n-3} \ldots a_1\, a_0\, a_{-1}\, a_{-2}\, a_{-3} \ldots a_{-p+1}\, a_{-p}$$

Y el valor representado por esta secuencia de dígitos se puede calcular como un polinomio de potencia de la base:

$$N = \sum_{i=-p}^{n-1} a_i \cdot b^i$$

6.2.- Los sistemas binario, octal y hexadecimal.

• **EL SISTEMA BINARIO**

Tiene base dos y los dígitos binarios (a_i), como en todo sistema de numeración, están comprendidos en el intervalo $0 \leq a_i \leq b$. Consta por lo tanto de dos signos distintos: 0 y 1.

Por ejemplo: $1101_2 = 13_{10}$ $(= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0)$

• **EL SISTEMA OCTAL**

Tiene base 8 y sus signos son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Ejemplo: $746_8 = 486_{10}$ $(7 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0)$

• **SISTEMA HEXADECIMAL**

Tiene base 16 y signo: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Ejemplo: $F9_{16} = 249_{10} = (15 \cdot 16 + 9 \cdot 16^0)$

Este sistema se usa en la comunicación del ordenador con sus usuarios debido a su comodidad, pues permite escribir con solo 2 dígitos los números del 0 al 255 del código ASCII.

6.3.- Teorema fundamental de la numeración

Dado un sistema de numeración de base b, con $b > 1$, cualquier número natural m puede expresarse de la forma siguiente:

$$m = r_0 \cdot b^0 + r_1 \cdot b^1 + \ldots + r_{n-1} \cdot b^{n-1}$$

siendo n el número de cifras del número m en ese sistema y los coeficientes

$r_i < b \quad \forall i = 0, \ldots, n-1, \quad r_i \in \mathbb{N}$

Demostración

- Si $m < b \Rightarrow m = m \cdot b^0$
- Si $m \geq b \Rightarrow$ Dividimos m y los sucesivos coeficientes obtenidos entre b:

$$
\begin{array}{llllll}
m & \underline{|b} & & & & \\
r_0 & c_1 & \underline{|b} & & & \\
 & r_1 & c_2 & \underline{|b} & & \\
 & & r_2 & c_3 & \ldots\ldots & c_{n-2} \, \underline{|b} \\
 & & & & & r_{n-2} \quad c_{n-1} = r_{n-1} < b
\end{array}
$$

Por lo que:

$$\left.\begin{array}{l} m = c_1 \cdot b + r_0 \\ c_1 = c_2 \cdot b + r_1 \end{array}\right\} m = (c_2 \cdot b + r_1) \cdot b + r_0 = c_2 \cdot b^2 + r_1 \cdot b + r_0$$

$$\left.\begin{array}{l} c_2 = c_3 \cdot b + r_2 \\ c_3 = c_2 \cdot b^2 + r_1 b + r_0 \end{array}\right\} m = (c_3 \cdot b + r_2) b^2 + r_1 \cdot b + r_0 = c_3 \cdot b^3 + r_2 \cdot b^2 + r_1 \cdot b + r_0$$

....

$$m = r_{n-1} \cdot b^{n-1} + r_{n-2} \cdot b^{n-2} + \ldots + r_1 \cdot b^1 + r_0 \cdot b^0$$

Con $r_i < b \quad \forall i = 0, \ldots, n-1$ (ya que son los restos)

$r_i \in \mathbb{N}$

n número de cifras de m en el sistema de base b.

Visto y demostrado el teorema anterior, podemos escribir un número natural m, en una base b con sus restos ordenados de la siguiente forma:

$$m = r_{n-1} \cdot r_{n-2} \cdot \ldots \cdot r_2 . r_1 . r_0 \,(_b$$

6.4.- Propiedades de la numeración

① Los números $b^0, b^1, b^2, b^3, \ldots$ se representan en el sistema de numeración de base b por $1, 10, 100, 1000 \ldots$

Por ejemplo: 4 en base 4 es $10_{4)}$

4^2 en base 4 es $100_{4)}$

② Si $m = r_k \cdot r_{k-1} \ldots r_1 \cdot r_0 \,(_b \Rightarrow m \cdot b^p = r_k \ldots r_1 r_0 \cdot 0 \overset{p)}{\ldots} 0$

Ejemplo: 4 en base 3 es $11 \,(_3$

$4 \cdot 3^2$ en base 3 es $1100 \,(_3$

③ Si m es base b tiene K cifras $\Rightarrow b^{k-1} \leq m < b^k$

Por ejemplo: 4 en base 4 es $10_{(4}$

$$4^1 \leq 4 < 4^2$$

④ Si m y m' son dos números en base b que tienen K y K' cifras respectivamente y $K<K' \Rightarrow m<m'$

⑤ Si m y m' son dos números en base b que tienen el mismo número de cifras K:

$m < m' \iff$ La primera cifra de m que sea distinta de su correspondiente en m' es menor que esta.

6.5.- Conversión entre sistemas de numeración.

CONVERSIÓN DE UN NÚMERO EN BASE b A BASE 10.

Para convertir un número escrito en cualquier base a su representación decimal equivalente bastará con desarrollar el polinomio de potencias de la base, es decir, simplemente hay que aplicar el teorema fundamental de la numeración.

Ejemplo:

$$322_{(4} = 3\cdot4^2 + 2\cdot4^1 + 2\cdot4^0 = 3\cdot16 + 2\cdot4 + 2 = 58_{(10}$$

Otra forma sería aplicando el algoritmo de Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & 2 & 2 \\ 4 & & 12 & 56 \\ \hline & 3 & 14 & 58_{(10} \end{array}$$

CONVERSIÓN DE UN NÚMERO EN BASE 10

Ahora el procedimiento es inverso: hacer las divisiones sucesivas del número entre la base b hasta que el cociente sea menor que b. Los números obtenidos como restos componen el número en base b, pero colocados en orden inverso al que se han ido obteniendo:

Ejemplo: $45_{(10}$ ¿Y en base 3?

$$\begin{array}{l} 45 \ \underline{|3} \\ 0 \quad 15 \ \underline{|3} \\ \quad\quad 0 \quad 5 \ \underline{|3} \\ \quad\quad\quad\quad 2 \quad 1 \end{array}$$

$45_{(10} = 1200_{(3}$

- Procedimiento mediante el cual también aplicamos el Teorema Fundamental de Numeración.

■ CONVERSIÓN DE UN NÚMERO EN BASE b A BASE b'

Convertiremos el número en base b a base 10 y de esta a base b'

$$\text{base } b \longrightarrow \text{base } 10 \longrightarrow \text{base } b'$$

Ejemplo:

$231_{(4}$, ¿ Y en base 5?

$$231_{(4} = 2\cdot 4^2 + 3\cdot 4^1 + 1\cdot 4^0 = 32+12+1 = 45_{(10}$$

$$45_{(10} \rightarrow \begin{array}{r|l} 45 & 5 \\ \hline 0 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 9 & 5 \\ \hline 4 & 1 \end{array} \rightarrow 45_{(10} = 140_{(5}$$

luego $231_{(4} = 140_{(5}$

6.6.- Operaciones en los sistemas de numeración

En este apartado vamos a ver cómo se opera con números escritos en una base distinta a la decimal. Una forma indirecta de resolver las distintas operaciones sería pasar los números a base decimal, hacer las operaciones en esta base y convertir el resultado a la base original. Pero lo podemos resolver directamente sin más que tener en cuenta que n unidades de un orden hacen una unidad de orden superior, ya que tanto las operaciones como los algoritmos de suma, producto y cociente son los mismos en cualquier base.

7.- Conclusión y justificación

Una vez estudiados los contenidos del tema ha quedado justificada la importancia del mismo. La construcción de los números naturales son el comienzo de la resolución de problemas de al ser humano se le plantean. Quedando con ellos dos aspectos inacabados desde un punto de vista algebraico. Uno es la inexistencia de elemento opuesto, lo que impide restar en gran número de casos, y otro es la posibilidad única de realizar una división entera con un cociente y un resto únicos. Esto llevará a la siguiente gran construcción algebraica: los números enteros.

Según el currículum de la ESO y Bachillerato, los cuales estan establecidas en los Decretos 87/2015 y 107/2022 para la ESO y 108/2022 para Bachillerato se estudian estos contenidos en profundidad en los primeros cursos de secundaria y trabajando ~~como~~ con ellos a lo largo de las etapas educativas.

Además, siendo la Orden 20/2019 que regula la respuesta educativa para la inclusión del alumnado en los centros educativos de la CV y que continúa con los principios establecidos por el Decreto 104/2018, en las aulas trataremos y adaptaremos los contenidos estudiados por nuestro alumnado, tratando la diversidad como un valor positivo, fomentando la equidad e inclusión mediante actividades multinivel y la implementación del diseño universal de aprendizaje.